შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	22.04.2012/ მათ/ II/130

ამოცანა № 4	გვერდი № 1

ვიხილავთ რამ ვერსია ყველა შესაძლო $f(x)$ ფუნქციის, განვიხილოთ ფუნქციების სახეები:

(I) $f(x)=kx$. მაშინ ჩვენი მოცემული ფუნქცია $f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$k(x+k\cdot x\cdot y)=k^2x+\boxed{k\cdot x\cdot y}$$

$$kx+k^2\cdot x\cdot y=k^2\cdot x+k\cdot x\cdot y,$$

ავიღოთ არ შეიძლება $f(x)=k$, სადაც $k\in R$, რადგან გამოსახულების მარცხენა მხარეს $xf(y)$, x წევრი არ იქნებოდა

ნებისმიერი x-ისთვის და y ტოლობა შესრულდება მხოლოდ ამ შემთხვევაში როდესაც $k=k^2$. ასე რომ ვარიანტები არის ორი: $k=0$ ან $k=1$.

(II) $f(x)=x+b$. მაშინ

$$x+y(x+b)+b=x+2b+x(y+b).$$

$$\cancel{x}+yx+yb+b=\cancel{x}+2b+\cancel{xy}\ xb.$$

$$y+1=x+2.$$

$y=x+1$. ეს ტოლობა შესრულდება მხოლოდ ზოგი x და y-ისთვის, რაც მოცემულ სიტუაციას ეწინააღმდეგება.

(III) $f(x)=|x|$

$$|x+y|x||=||x||+x|y|.$$

ჩვენ უკვე მივხვდით, შესაძლებელია ეს ფუნქცია აკმაყოფილებდეს პირობას, მაგრამ არა ყველასთვის, მაგალითად ტოლობა არ არის შესრულებული ნებისმიერი x და y-სთვის, როდესაც $y<0$ და $x>0$.

(IV) $f(x)=x^n$.

$$(x+yx^n)^n=x^{n^2}+y^n\cdot x.$$

ეს ტოლობა შესრულდება მხოლოდ გარკვეული x და y-სთვის.

სხვა ტიპის ფუნქციები, ან მათი კომბინაციები (მაგ: $f(x)=kx+b$) ტოლობა მხოლოდ გარკვეული x და y-ისთვის შესრულდება და არა ყველასთვის. ასე რომ ჩვენი ფუნქციის შესაძლო სახე: $f(x)=0$ და $f(x)=x$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

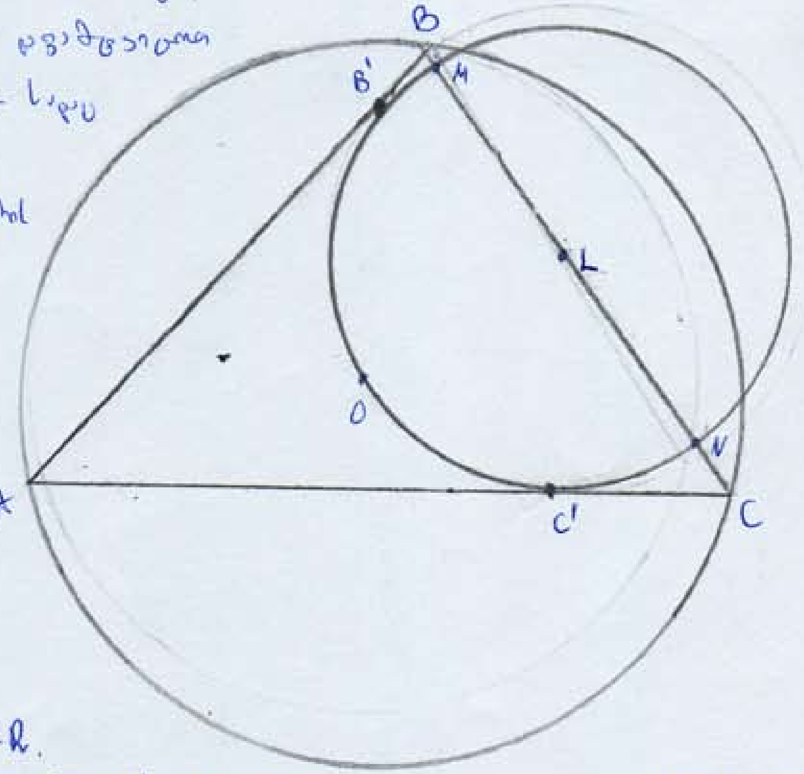
22.04.2012/ მათ/ II/ 130

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

ამისათვის რომ დავამტკიცოთ რომ ω წრეწირი და სამკუთხედზე შემოხაზული მეორე წრეწირი იკვეთება ორ წერტილში
საკმარისია დავამტკიცოთ
პირობა: $r < R < 2r$ სადაც

r - ω-ს რადიუსია.
R - შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.



$BC > 2r$

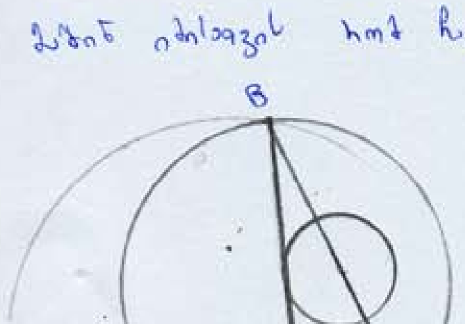
$BC < 2R \Rightarrow$

$2r < BC < 2R$.

საიდანაც $r < R$.

ახლა დავამტკიცოთ რომ $R < 2r$. დავუშვათ საწინააღმდეგო $R > 2r$.

მაშინ ავიღოთ რომ ჩვენი წრეწირი სადაც ~~...~~ ერთ დავამტკიცოთ ~~...~~ ერთ-ერთი ~~...~~ პირობა, როდესაც მოცემული გვაქვს



1) AB და AC გადიან ~~...~~ წრეწირის ცენტრს.

2) △ABC მახვილკუთხაა.

3) ეს წრეწირი არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული

აქედან გამომდინარე $R < 2r$.

$r < R < 2R$. დამტკიცდა.

$\dfrac{1}{a^2-2a+5}+\dfrac{1}{b^2-2b+5}+\dfrac{1}{c^2-2c+5}.$ ამ გამოსახულების მინიმალური მნიშვნელობის მისაღე-

ბად, თითოეული მნიშვნელი უნდა იყოს მაქსიმალური. ამასთან, ვიცით მათი ჯამი

$a+b+c=1.$ ახლა განვიხილოთ ზოგადი ფუნქცია $y=x^2-2x+5.$ ამ ფუნქციის

~~მინიმალური~~ მნიშვნელობები $x=0,\ y=5$ და $x=1\ y=4.$ ანუ ჩვენი ~~ფუნქციის~~ გამოსახ-

ულების თითოეული ~~წევრი~~ მიეკუთვნება შუალედს $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)$;

დავუშვათ რომ $a=b$ და ამავე დროს ფუნქციები (a^2-2a+5) და (b^2-2b+5) მნიშვნე-

ლობები მაქსიმალურია. მაშინ a და b ... ... შემდეგ ... :

$a+b+c=1$

$2a+c=1.$ საიდანაც $c=1-2a.$

შევიტანოთ c-ს მნიშვნელობა პირველ გამოსახულებაში. (გავითვალისწინოთ რომ $a=b$)

$$\frac{2}{a^2-2a+5}+\frac{1}{(1-2a)^2+2(1-2a)+5}=\frac{2}{a^2-2a+5}+\frac{1}{1-\cancel{4a}+4a^2-2+\cancel{4a}+5}=\frac{2}{a^2-2a+5}+\frac{1}{4(a^2+1)}$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ბოლო გამოსახულების მინიმალური მნიშვნელობა

$$\frac{2}{a^2-2a+5}+\frac{1}{4(a^2+1)}=\frac{8a^2+8+a^2-2a+5}{4(a^2+1)(a^2-2a+5)}=\frac{9a^2-2a+13}{4(a^2+1)(a^2-2a+5)}$$

$9a^2-2a+13$ მინიმალური მნიშვნელობაა $\frac{116}{9}$ როდესაც $a=\frac{1}{9}.$

მაშინ მნიშვნელი იქნება:

$$4\cdot\frac{82}{81}\cdot\left(\frac{1}{81}-\frac{2}{9}+5\right)=4\cdot\frac{82}{81}\cdot\frac{1-18+405}{81}=4\cdot\frac{82}{81}\cdot\frac{388}{81}$$ ანუ გვექნება:

$$\frac{\frac{116}{9}}{4\cdot\frac{82}{81}\cdot\frac{388}{81}}=\frac{29\cdot9\cdot81}{82\cdot388}=\frac{29\cdot729}{82\cdot388}$$

დავასკვნით გამოსახულების მინიმალური მნიშვნელობა არის $\dfrac{29\cdot729}{82\cdot388}$